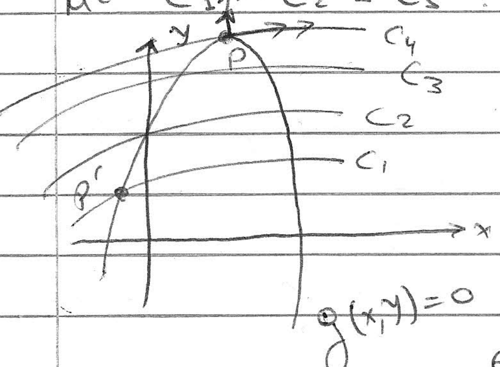
23/02/16

(Στο προηγούμενο π.χ. με τον κύκλο M:
Κάθε $(x,y)\in M$ είναι σημείο ολικού max και min της $f|_M$
αφού $\forall (x,y)\in M$: $f(x,y)=1$)

[Απόδειξη του Lagrange: Στηρίζεται στο ΘΠΣ και στην ακόλουθη Παρατήρηση]

Έστω $n=2$, $r=1$, $U=\mathbb{R}^2$ και έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ δίνει τη θερμοκρασία σε κάθε σημείο $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Έστω επίσης $f(x,y)=c_i$, $i=1,\dots,n$ οι ισόθερμες καμπύλες (δηλ. οι καμπύλες στάθμης c_i της f) με $c_1<c_2<c_3$.



Έστω ότι η συνθήκη $g(x,y)=0$ έχει τη μορφή του σχήματος. Μας ενδιαφέρει σε ποιο σημείο της καμπύλης $g(x,y)=0$ η f παίρνει την μέγιστη τιμή της.
Όταν κινούμαστε πάνω στην Γ, στο σημείο P' παρατηρούμε ότι αλλάζει (αυξάνει) η θερμοκρασία επειδή κινούμαστε κάθετα (γενικότερα τέμνουμε) μία ισόθερμη καμπύλη, ενώ στο P δεν παρατηρούμε αλλαγή θερμοκρασίας επειδή κινούμαστε παράλληλα προς την ισόθερμη καμπύλη $f(x,y)=c_4$. Έστω ότι οι καμπύλες $g(x,y)=0$ και $f(x,y)=c_4$ εκφράζονται ρητά από τις συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ δηλ. $g(x,y_1(x))=0$, $f(x,y_2(x))$ (για μία περιοχή του ξ)
Τότε θα πρέπει στο σημείο $P=(\xi,\eta)$ να ισχύει $y_1'(\xi)=y_2'(\xi)$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)+\underbrace{\left(\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)}{\frac{\partial g}{\partial y}(\xi,\eta)}\right)}_{\lambda=}\frac{\partial g}{\partial x}(\xi,\eta)=0 \qquad \overset{\text{ΘΠΣ}}{=}\ \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}(\xi,\eta)}{\frac{\partial g}{\partial y}(\xi,\eta)} \overset{\text{ΘΠΣ}}{=} -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)}{\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)} \Rightarrow$$

$$\text{και } \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)+\underbrace{\left(\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)}{\frac{\partial g}{\partial x}(\xi,\eta)}\right)}_{\lambda=}\frac{\partial g}{\partial y}(\xi,\eta)=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\nabla f(\xi,\eta)+\lambda\nabla g(\xi,\eta)=0}$$

Μέσω πολ/σιών Lagrange: $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: g(x,y)=0\}=\{\bar{\gamma}(t): t\in\mathbb{R}\}$
και έστω ότι κάθε $f(x,y)=c\in\mathbb{R}$ είναι το σύνολο $\{\bar{c}(t): t\in J\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \nabla g(\bar{\gamma}(t))\cdot\bar{\gamma}'(t) = 0, \forall t\in\mathbb{R}$ (1)

$\nabla f(\bar{c}(t))\cdot\bar{c}'(t), \forall t\in J$ (2)

Ψάχνουμε που ισχύει: $\frac{d}{dt} f(\bar{\gamma}(t)) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \nabla f(\bar{\gamma}(t))\cdot\bar{\gamma}'(t) = 0$ (3).

Από (1),(2),(3) προκύπτει ότι η (3) θα ισχύει όταν $\bar{c}(t_0) = \bar{\gamma}(t_0)$ και $\bar{\gamma}'(t_0) \parallel \bar{c}'(t_0) \Leftrightarrow \nabla f(\bar{c}(t_0)) \parallel \nabla g(\bar{c}(t_0)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \nabla f(\bar{c}(t_0)) = \lambda \nabla g(\bar{c}(t_0))$

<u>Παρατήρηση</u>: Η συνθήκη $\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{\lambda} D\bar{g}(\bar{x}_0)$ είναι δηλαδή μία <u>αναγκαία</u> συνθήκη για να έχει η $f|_M$ ακρότατο στο $\bar{x}_0\in M$ (και μάλιστα μόνο στην περίπτωση όπου $\text{rank}\, D\bar{g}(\bar{x}_0) = r$). $\Rightarrow$ Για να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα αυτό κάνουμε τα εξής:

① Επιλύουμε ως προς $(\bar{x},\bar{\lambda}) = (x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_r)\in U\times\mathbb{R}^r$ το σύστημα $\underline{\nabla F(\bar{x},\bar{\lambda}) = \bar{0}}$, όπου $F(\bar{x},\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}\cdot\bar{g}(\bar{x}) - f(\bar{x})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda_1,\dots,\lambda_r)\cdot\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\bar{x}),\dots,\frac{\partial g_r}{\partial x_i}(\bar{x})\right) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0 \\ g_j(\bar{x}) = 0, \forall j=1,\dots,r \end{cases}$$

$\forall i=1,\dots,n$.

Οι πρώτες $i=1,\dots,n$ εξισώσεις του συστήματος που βρήκαμε ισοδυναμούν με $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})\right) = (\lambda_1,\dots,\lambda_r)\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial x_n}(\bar{x})\end{pmatrix}$

Οι δεύτερες $j=1,\dots,r$ εξισώσεις ισοδυναμούν με $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{0}$ [δηλ. επιλύοντας το σύστημα $\nabla F(\bar{x},\bar{\lambda}) = \bar{0}$ ως προς $(\bar{x},\bar{\lambda})$, βρίσκουμε όλα αυτά για τα οποία το $\bar{x}$ ικανοποιεί τη συνθήκη $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{0}$, δηλ το $\bar{x}$ βρίσκεται στο M, και ικανοποιείται και η συνθήκη των πολ/στών Lagrange]

② Τα $\bar{x}$ των λύσεων $(\bar{x},\bar{\lambda})$ με $\text{rank}\, D\bar{g}(\bar{x}) = r$, είναι υποψήφια σημεία ακροτάτων της $f|_M$

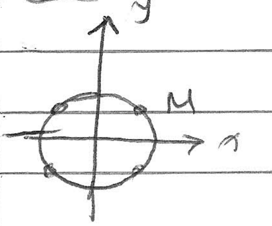
③ Βρίσκουμε τα $\bar{x}\in M$ για τα οποία $\text{rank}\, D\bar{g}(\bar{x}) < r$, τα οποία

Είναι επίσης <u>υποψήφια</u> σημεία ακροτάτων της $f|_M$.

④ Εξετάζουμε αν πράγματι τα υποψήφια σημεία είναι ακρότατα.

<u>Παράδειγμα</u>: Βρείτε τα ακρότατα (τοπικά/ολικά) της $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x,y)=x\cdot y$ περιορισμένη στον μοναδιαίο κύκλο κέντρου $(0,0)$.

<u>Λύση</u>: $M:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : g(x,y)=x^2+y^2-1=0\}$. Θέλω να βρω τα ακρότατα της $f|_M : M\to\mathbb{R}$



$$F(x,y,\lambda)=\lambda\cdot g(x,y)-f(x,y)=\lambda(x^2+y^2-1)-xy.$$

$$\nabla F(x,y,\lambda)=(2\lambda x-y,\ 2\lambda y-x,\ x^2+y^2-1)=(0,0,0)\Rightarrow$$

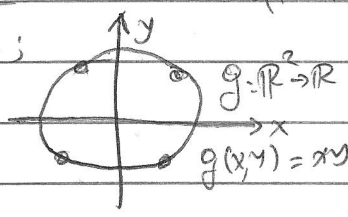
$$\Rightarrow y=2\lambda x,\ x=2\lambda y,\ 1=4\lambda^2(x^2+y^2)=4\lambda^2\Rightarrow$$

$$\lambda^2=\frac{1}{4}\Rightarrow \boxed{\lambda=\pm\frac{1}{2}}\Rightarrow \boxed{y=\pm x},\ 2x^2=1\Rightarrow \boxed{x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Άρα $(x,y)\in\left\{\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right),\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{-1}{\sqrt2}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)\right\}$
[αυτό ήταν το ①].

② Ψάχνουμε τα σημεία $x^2+y^2=1$ για τα οποία $\nabla g(x,y)$ <u>δεν</u> έχει βαθμίδα 1, δηλ $\nabla g(x,y)=0$

<u>Ερώτημα</u>: Σε ποια σημεία του M έχει η $f(x,y)=xy$, $(x,y)\in M$, έχει ακρότατα;

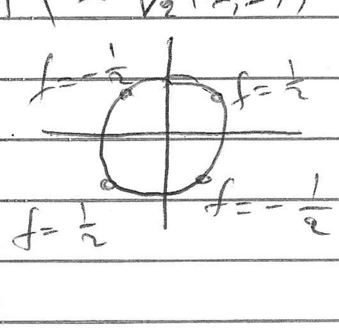


$$\nabla g(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow(2x,2y)=(0,0)\Rightarrow$$
(Δεν έχει)

$\Rightarrow$ δεν βρήκαμε άλλα σημεία.

Άρα όλα τα υποψήφια σημεία είναι τα $\left\{\pm\frac{1}{\sqrt2}(1,1),\ \pm\frac{1}{\sqrt2}(1,-1)\right\}$

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}(1,1)\right)=\frac{1}{2},\quad f\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}(1,-1)\right)=-\frac{1}{2}$$



Επίσης από τη θεωρία ξέρουμε ότι το $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ είναι συμπαγές και η $f|_M$ συνεχής $\Rightarrow$ η $f|_M$ έχει ολικό min κ' max τα οποία είναι και τοπικά ακρότατα και άρα θα εμφανίζονται στη λίστα 'Lagrange'.

Παρατήρηση: Πολλές φορές δεν χρειάζεται (επιτρέπεται όμως αν ισχύουν οι προϋπ.) να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Lagrange. (βλέπε π.χ. επόμενη άσκηση)

Άσκηση Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της
$$f(x,y) = xy^2 \text{ υπό τη συνθήκη } x^2+y^2=1.$$

Λύση: Θέλω να βρω τα ακρότατα της $h: M \to \mathbb{R}$
με $h(x,y) = xy^2$, όπου $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$

$\forall (x,y) \in M$ έχω $x^2+y^2=1 \Rightarrow h(x,y) = xy^2 = x(1-x^2) = H(x)$

$x \in [-1,1]$